

Question 7 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

☐ ~~$-1 < \alpha < 0$~~ ☐ ~~$\alpha < -1$~~ ☐ ~~$\alpha \geq 0$~~ ☒ $\alpha < 0$

2022-2023

Strat: 1- traiter une infinité de cas avec un critère.
2- traiter le nombre fini de cas restants.

1- Critères: Comparaison, d'Alembert, Cauchy alternées
2 personnes.
6 personnes
plein de gens
1 personne
personne.
 $f(0) = f'(0), f \in C^2$ personne.

limsup :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|1 + \frac{\alpha}{n}\right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{1 + \frac{\alpha}{n}}_{\rightarrow 1}\right)^{\underbrace{n}_{\rightarrow +\infty}}$$

⚠ Faux! $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = 1$ $\uparrow$ n'importe quel $= 1$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} 1 + \frac{\alpha}{m}\right)^n = 1$$

si $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{1 + \frac{\alpha}{n}}_{\substack{> 0 \\ \approx \\ > 1}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} +\infty = +\infty$$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \leftarrow n \log\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$$

$x = n$

$$f(x) = x \log\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$$

$x = \frac{1}{n}$ $\alpha \rightarrow n = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \log(1 + \alpha x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$x = \frac{\alpha}{n}$, $n = \frac{\alpha}{x}$, $f(x) = \frac{\alpha}{x} \log(1+x)$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} \log(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)}}$$

$$= e^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|1 + \frac{\alpha}{n}\right|^{n^2}} = e^{\alpha}$$

si $e^{\alpha} < 1$, convergence $\iff \alpha < 0$

si $e^{\alpha} > 1$ divergence $\iff \alpha > 0$

si $e^{\alpha} = 1$??? $\iff \alpha = 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 \quad \text{diverge}$$